# Diffusion multiple dans les systèmes désordonnés composés de diffuseurs de taille finie et approche du groupe de renormalisation pour la description des systèmes d'électrons en interaction

20 novembre 2000,

Sebastião Correia.

# Plan

I. Introduction aux systèmes désordonnés

II. Diffusion multiple d'une particule quantique

- corrections au libre parcours moyen (régime diffusif)
- approche numérique (régime diffusif-balistique)

III. Gaz d'électrons

- équations de flot des constantes de couplage
- solution à l'ordre d'une boucle

IV. Conclusion

# I. Introduction

## Systèmes concernés :

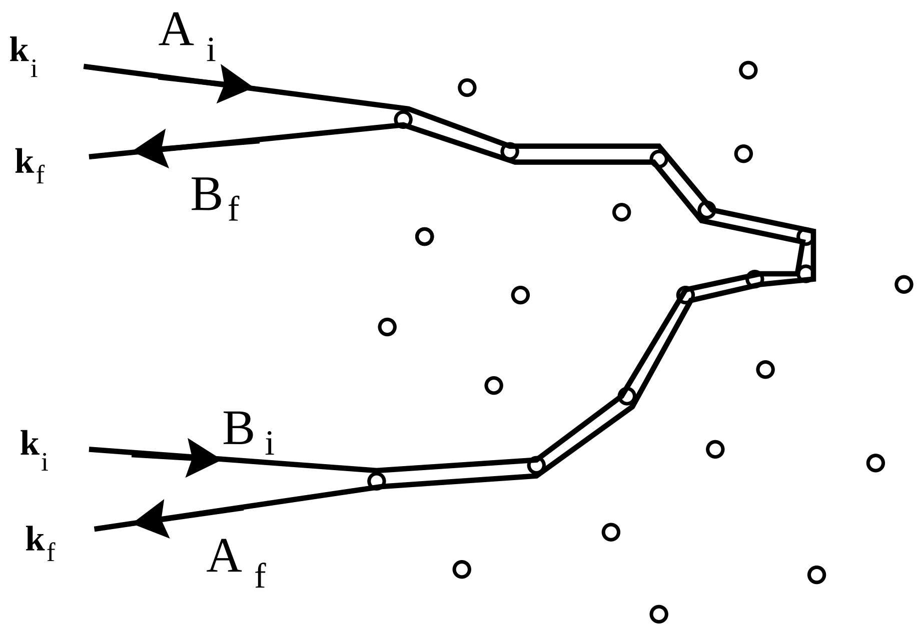
- électrons dans les métaux avec impuretés,
- lumière traversant le brouillard,
- ondes E.M. dans l'espace interstellaire,
- ondes acoustiques . . .

## Phénomènes :

- fluctuation de l'intensité transmise,
- rétrodiffusion cohérente,
- localisation.

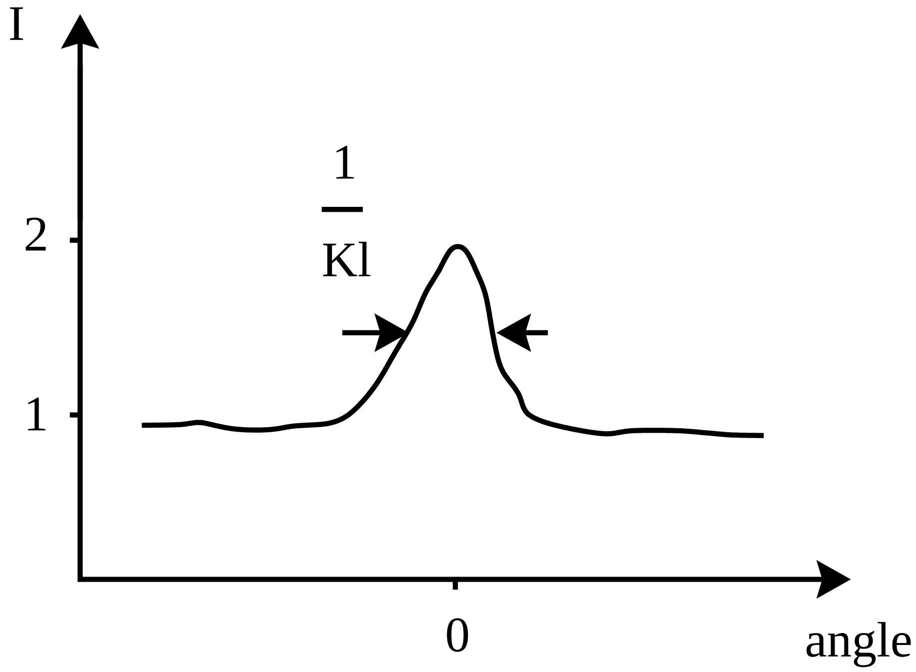
## Théories :

- calcul de valeurs moyennes $\longrightarrow l$,
- interférences constructives, cône de rétrodiffusion $\propto \frac{1}{Kl}$ (Akkermans *et al.*, 1988),
- absence de conductivité dans les matériaux désordonnés, transition de phase Métal-Isolant (Anderson, 1958) ;
  localisation pour $Kl \leq 1$, critère de Ioffe-Regel, 1960.




$$B_f = A_f\, e^{-i(\mathbf{k}_i+\mathbf{k}_f)(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

$$|A_f + B_f|^2 = 2[1 + \underbrace{\cos((\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f)(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}_{\text{interférences}}]|A_f|^2$$



Quantités physiques importantes :

– le libre parcours moyen $l$ qui s'obtient à partir de $\overline{G(E,\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$,
– la conductivité (section efficace de diffusion $\sigma$) qui s'obtient à partir de $\overline{|G(E,\mathbf{r}-\mathbf{r}')|^2}$.

L'approche standard suppose les diffuseurs ponctuels $\Rightarrow$ calculs simplifiés : pas de corrélation spatiale, éléments de matrice de diffusion sur couche d'énergie ...

L'approche élaborée fait appel à des diffuseurs de taille finie, modélisés par des potentiels de type sphère dure ($\Rightarrow$ pas de structure interne) en 2 et 3 dimensions.

# II. Diffusion multiple d'une particule quantique

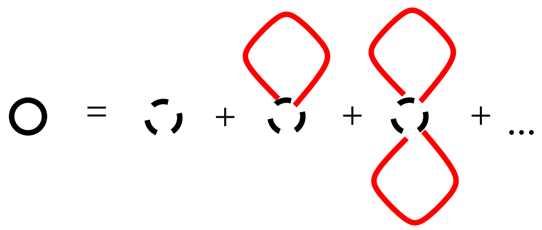
## Diffusion sur un centre :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \mathbf{v}, \quad v(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G =& G_0 + G_0 \mathbf{v} G \\ =& G_0 + G_0 \mathbf{t} G_0 \end{aligned}$$

Matrice de diffusion

$$\mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{v} G_0 \mathbf{v} + \mathbf{v} G_0 \mathbf{v} G_0 \mathbf{v} + \cdots$$




## Diffusion sur $N$ centres :

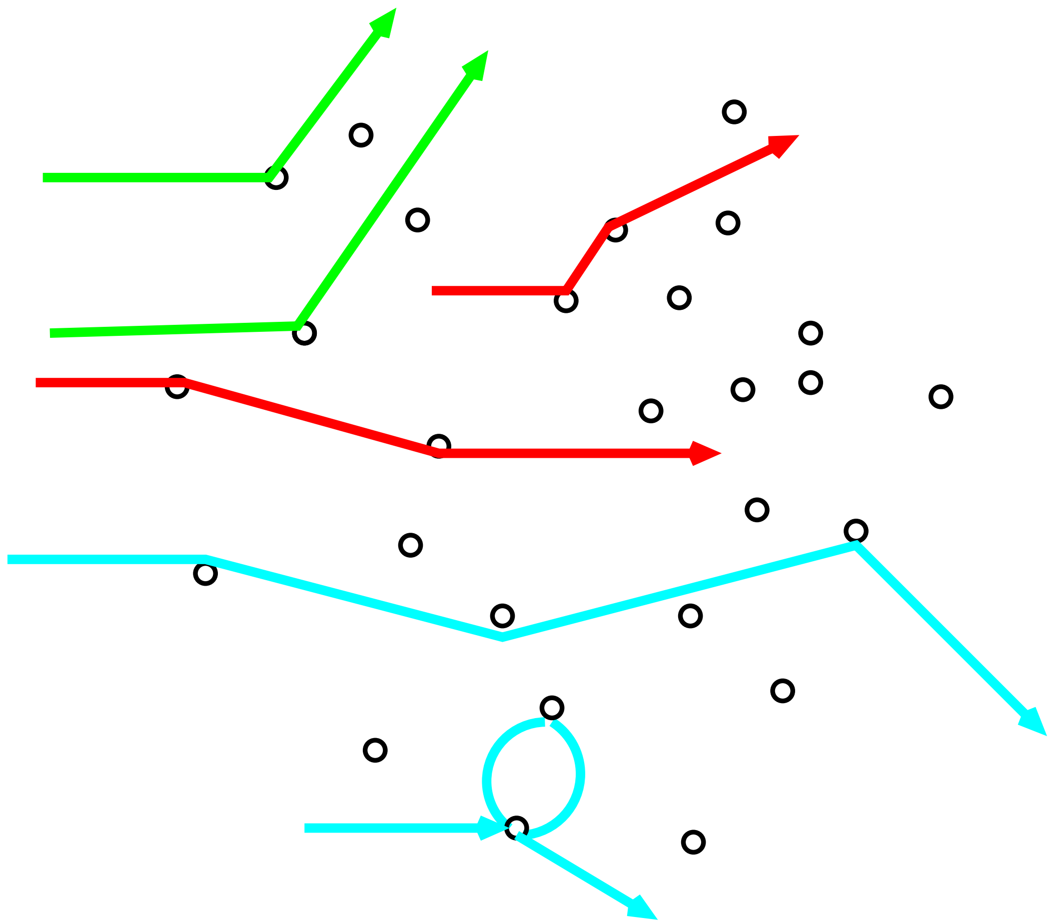
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i$$

$$\Rightarrow G = G_0 + G_0 \left( \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \right) G = G_0 + G_0 \mathcal{T} G_0$$

$\mathcal{T}$ est la série de Watson

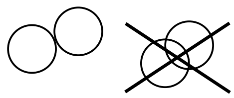
$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{t}_i + \sum_{i,j \neq i} \mathbf{t}_i G_0 \mathbf{t}_j + \sum_{\substack{i,j \neq i, \\ k \neq j}} \mathbf{t}_i G_0 \mathbf{t}_j G_0 \mathbf{t}_k + \cdots$$

et fait intervenir la matrice t hors couche d'énergie : $\langle \mathbf{k}' | \mathbf{t}_K | \mathbf{k} \rangle$ avec $k$ et $k'$ qui peuvent être différents de $K \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$.



# Libre parcours moyen

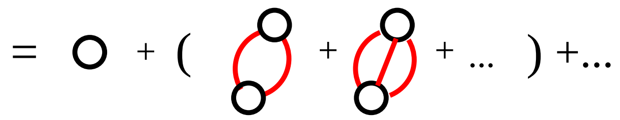
Calcul de la moyenne de $G$ (pour $Ka \ll 1$)



$$\bar{G} = G_0 + G_0 \Sigma \bar{G}$$

Développement de l'énergie propre $\Sigma$ en puissances de $\rho$ :

$$\Sigma = \underbrace{\Sigma^{(1)}}_{\mathcal{O}(\rho)} + \underbrace{\Sigma^{(2)}}_{\mathcal{O}(\rho^2)} + \cdots$$



$l$ s'obtient à partir de $\Im\mathfrak{m}\Sigma$

$$\frac{l}{l_0} = 1 - \left( \frac{\Re\mathfrak{e}\Sigma^{(1)}}{2K^2} - \frac{\Re\mathfrak{e}\Sigma^{(1)\prime}}{K} + \frac{\Im\mathfrak{m}\Sigma^{(2)}}{\Im\mathfrak{m}\Sigma^{(1)}} \right)$$

$$+ \text{ Vol. exclu } + \mathcal{O}(\rho^2)$$

Corrections au libre parcours moyen de Boltzmann $l_0$.

① $\Re\mathfrak{e}\frac{\Sigma^{(1)}}{2K^2} \Leftarrow$ matrice $\mathfrak{t}$ sur couche d'énergie,

② $\frac{\Re\mathfrak{e}\Sigma^{(1)\prime}}{K} \Leftarrow$ matrice $\mathfrak{t}$ hors couche d'énergie,

③ $\frac{\Im\mathfrak{m}\Sigma^{(2)}}{\Im\mathfrak{m}\Sigma^{(1)}} \Leftarrow$ diffusion multiple sur 2 centres,

④ Vol. exclu $\propto \rho a^d$.

Résultats :

$\forall d$, terme ② $\sim$ Vol. exclu ④ $\sim$ contribution des ondes partielles supérieures $\Rightarrow$ ② et ④ négligés ici.

En dimension $d = 3$, le terme ① est compensé par le 1er terme de ③.

$$\frac{l}{l_0} \approx 1 - \rho \left( \underbrace{\frac{\pi^2 a^2}{K}}_{③} + \mathcal{O}(a^3) \right)$$

Comparaison avec les diffuseurs ponctuels

$$\Rightarrow \frac{\rho a^2}{K} \propto \frac{1}{K l_0} \longleftrightarrow \frac{\rho}{K^3}$$

$\Rightarrow$ comportement différent en énergie (moins sensible à la limite $K \to 0$).

Pas de développement en $\frac{1}{K l_0}$ pour les diffuseurs ponctuels alors que c'est le paramètre de développement naturel en régime diffusif puisque $l_0$ est la longueur caractéristique des modèles à diffuseurs ponctuels.

En dimension $d = 2$, pas de compensation entre les termes ① et ③.

$$\frac{l}{l_0} \approx 1 + \frac{\pi\rho}{K^2}\left(\underbrace{\frac{1}{\ln Ka}}_{①} + \underbrace{\frac{3}{\ln^2 Ka}}_{③}\right)$$

Les corrections ne s'écrivent pas simplement en fonction de $l_0$.

$\Rightarrow$ nécessité d'introduire une distance caractéristique plus fondamentale que $l_0$ : $a$.

Pas de comparaison avec les diffuseurs ponctuels.

Diffuseurs ponctuels $\neq$ limite quand $a \to 0$ des diffuseurs de taille finie.

## Approche numérique en $d = 2$

permet l'étude d'autres régimes que le régime métallique ($Kl \gg 1$).

La série de Watson $\mathcal{T}$ peut être resommée analytiquement pour s'écrire

$$\mathcal{T} = -CM^{-1}D,$$

où $C$,$M$,$D$ = matrices $(N \times m) \times (N \times m)$.

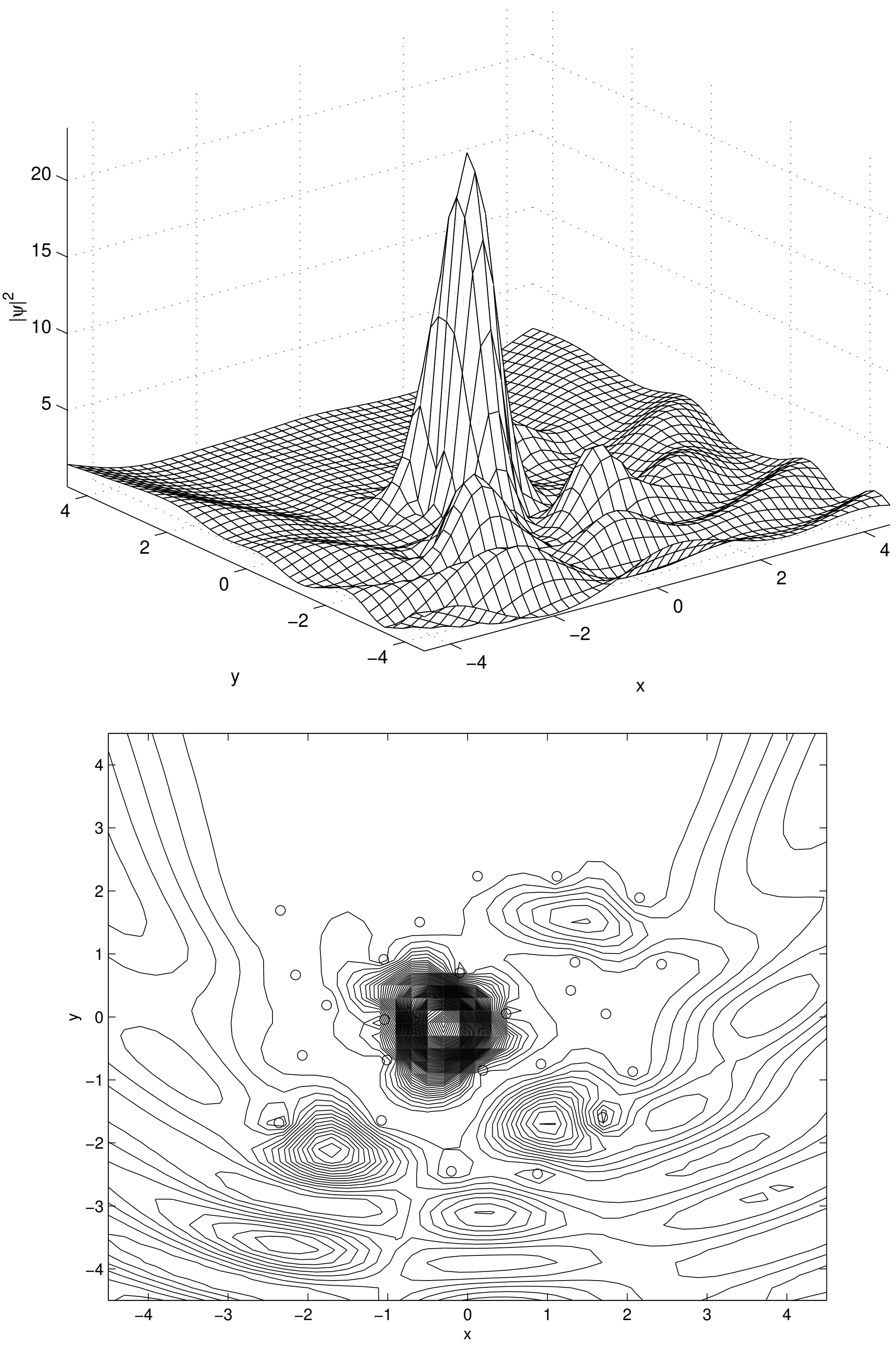
Approximation $Ka \to 0 \Rightarrow m = 1$.

– fonction d'onde donnée par l'équation de Lippmann-Schwinger

$$|\psi_{\mathbf{K}}\rangle = |\mathbf{K}\rangle + G_0 \mathcal{T} |\mathbf{K}\rangle,$$

– section efficace totale

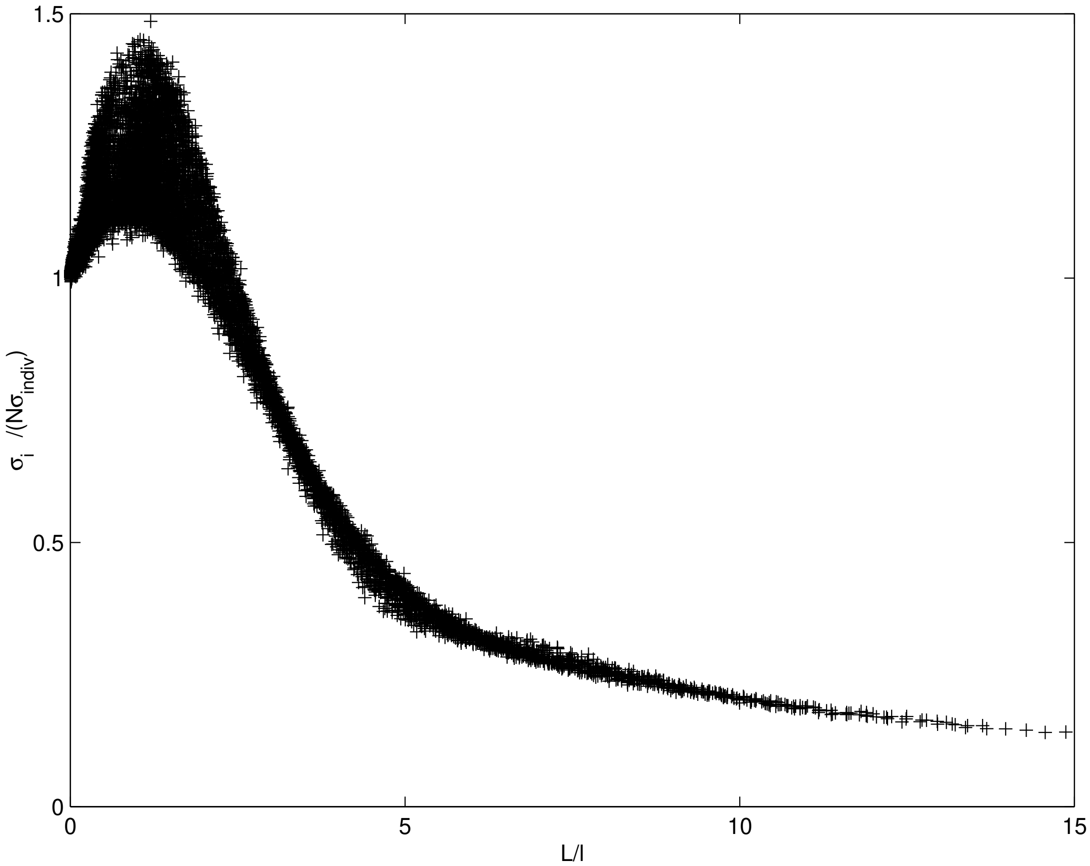
$$\begin{aligned}\sigma =& \frac{1}{8\pi K}\int_0^{2\pi} d\theta |\langle \mathbf{K}'|\mathcal{T}|\mathbf{K}\rangle|^2 \\ =& -\frac{1}{K}\mathfrak{Im}\langle \mathbf{K}|\mathcal{T}|\mathbf{K}\rangle\end{aligned}$$




Calcul *ab initio* de $|\psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r})|^2$, 25 disques durs.

## Passage du régime balistique au régime diffusif

- balistique : $\bar{\mathcal{T}} \approx \overline{\sum_i \mathbf{t}_i} = N\mathbf{t}$
  $\Rightarrow \sigma \approx N\sigma_{\text{indiv}}$,
- diffusif : $\sigma \propto L \Rightarrow \sigma \approx N\sigma_{\text{indiv}} \times \left(\frac{L}{l}\right)^{-1}$.




$$441 \leq N \leq 3721,$$
$$4.5.10^{-7} \leq \rho a^2 \leq 1.5.10^{-4},$$
$$0.04 \leq Ka \leq 0.1.$$

Régimes perturbatifs (balistique et diffusif) bien compris.

Régime transitoire surprenant : forte dépendance en $Ka$.

Lorsque $Ka$ diminue, $\frac{\sigma}{N\sigma_{\text{indiv}}}$ augmente.

Passage balistique $\rightarrow$ diffusif $\Rightarrow$ apparition de la diffusion sur 2 centres ...

L'approximation $\mathcal{T} \approx \sum_i \mathbf{t}_i + \sum_{i,j\neq i} \mathbf{t}_i G_0 \mathbf{t}_j$ insuffisante.

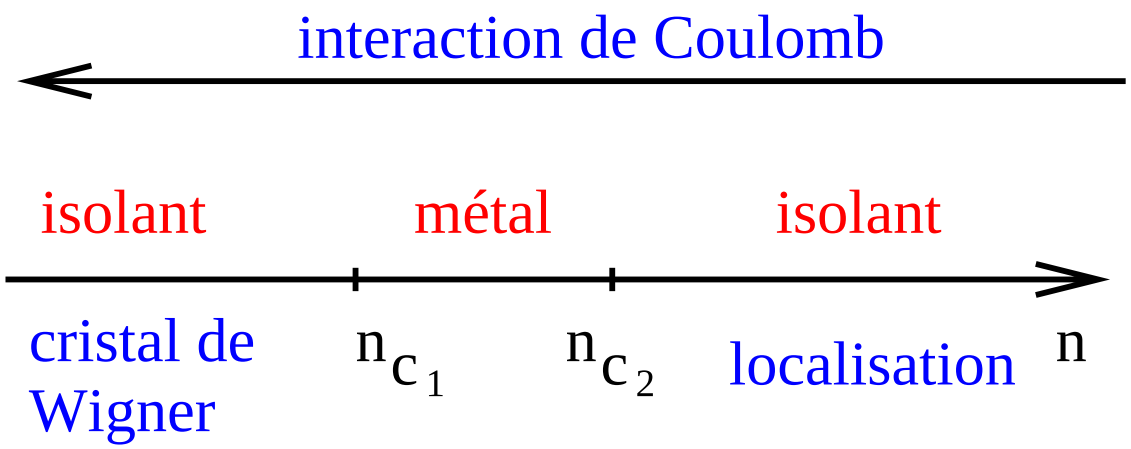
L'approximation $\mathcal{T} \approx (i) + (ij) + (iji) + (ijij) + \cdots$ explique qualitativement le comportement de $\frac{\sigma}{N\sigma_{\text{indiv}}}$.

L'approche numérique permet l'étude des transitions entre différents régimes (ici balistique-diffusif, mais aussi diffusif-localisé).

Série de Watson = formalisme pour une particule + désordre ; inadaptée pour $\mathcal{N}$ particules en interactions + désordre.

Importance de l'interaction de Coulomb ?

Abrahams *et al.* (1979) : théorie d'échelle $\Rightarrow$ localisation en $d \leq 2$.
Kravchenko *et al.* (1994) : conductivité inattendue dans des semi-conducteurs au **Si** en d=2 (*i.e.* propagation des électrons).




Pas de modèle satisfaisant décrivant cette transition.
Nouvelle approche non perturbative dont l'objectif est de traiter les électrons en interaction en présence de désordre.

Application aux électrons en interaction.

## III. Gaz d'électrons

Nouvelle approche s'inspirant du groupe de renormalisation (même technique mais philosophie différente).

But : obtenir une action effective décrivant le système d'électrons en interaction.

Principe du groupe de renormalisation : intégration successive sur les fluctuations du champ de courte longueur d'onde (contrôlées par la coupure).
Système observé à différentes échelles.

Principe de l'approche proposée : intégration successive sur les fluctuations de l'amplitude du champ contrôlées par un paramètre $M$.
Différents systèmes observés à la même échelle.

## 1. Modèle scalaire (Alexandre et Polonyi, 1999)

Objectif : obtenir une action effective Γ pour le système décrit par l'action microscopique

$$S_B = \int_x \left(\frac{1}{2}(\partial\varphi_x)^2 + g\varphi_x^4\right)$$

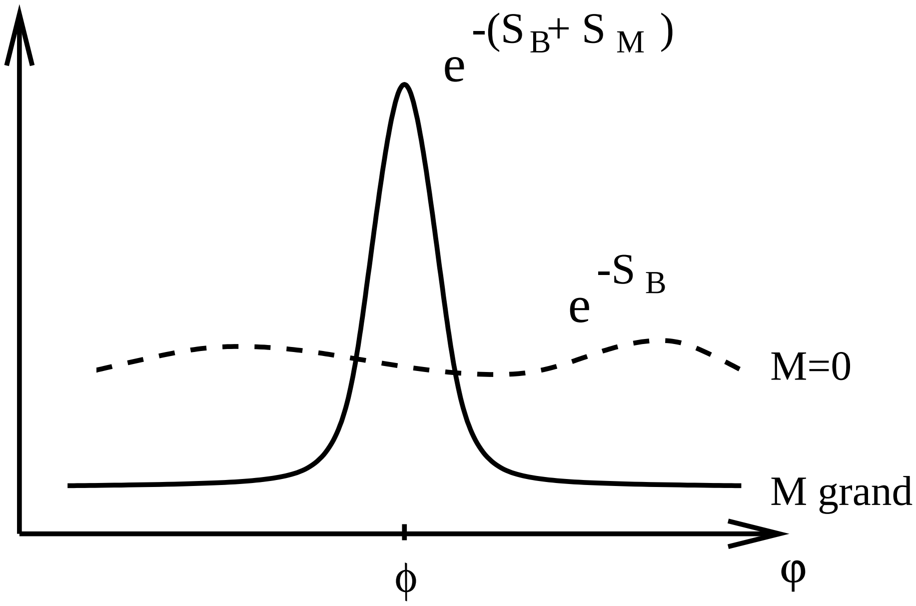
Γ décrit le système de façon macroscopique : contient les constantes de couplage renormalisées (mesurées) $\longrightarrow$ quantités physiques contrairement à l'action $S_B$.

Obtention de Γ à partir d'une équation différentielle.

Élimination des fluctuations du champ $\varphi$ en ajoutant $S_M$

$$S_B \longrightarrow S_B + S_M$$

Exemple : $S_M = \frac{1}{2}\int_x M^2\varphi_x^2$
$M = \infty \Rightarrow$ théorie gaussienne triviale
$M = 0 \Rightarrow$ théorie $S_B$.




Action effective $\Gamma_M$

$$e^{-\Gamma_M[\phi]} = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-(S_B[\varphi]+S_M[\varphi]+J\cdot(\varphi-\phi))}$$

où

$$\phi \equiv \langle\varphi\rangle_J = \int \mathcal{D}[\varphi]\varphi e^{-(S_B[\varphi]+S_M[\varphi])+J\cdot\varphi}.$$

Pour $M = \infty$, la méthode du col conduit à

$$\Gamma_{M=\infty}[\phi] = S_B[\phi] + S_M[\phi].$$

Variation de $M$ pour obtenir $\Gamma_{M=0}$.

Équation d'évolution de l'action effective

$$\begin{aligned}\partial_{M^2}\Gamma_M =& \frac{1}{2}Tr\langle\varphi^2\rangle_J \\ =& \frac{1}{2}Tr\left(W^{(2)}_{J,J}\right) + \frac{1}{2}Tr\left(\phi\phi\right)\end{aligned}$$

$W^{(2)}_{J,J}$ inconnue $\Rightarrow$ l'écrire en fonction de $\Gamma$ grâce à $W^{(2)}_{J,J}\Gamma^{(2)}_{\phi,\phi} = 1$

$$\Rightarrow \partial_{M^2}\Gamma_M = \frac{1}{2}Tr\left(\left[\Gamma^{(2)}_{\phi,\phi}\right]^{-1}\right) + \frac{1}{2}Tr\left(\phi\phi\right)$$

Équation différentielle fonctionnelle avec la C.I. : $\Gamma_{M=\infty}[\phi] = S_B[\phi] + S_M[\phi]$.

Hypothèse sur la forme de $\Gamma_M$ (développement du gradient) :

$$\Gamma_M[\phi] = \int \frac{1}{2}Z(\phi)(\partial\phi)^2 + U(\phi) + \mathcal{O}(\partial^4)$$

avec

$$Z(\phi) = \sum_n \frac{\alpha_n(M)}{n!}\phi^n(x),$$

$$U(\phi) = \sum_n \frac{g_n(M)}{n!}\phi^n(x)$$

Obtenir $\Gamma_{M=0} \Longleftrightarrow$ obtenir $\alpha_n(0)$ et $g_n(0)$.

## Approximation du champ homogène :

$$\phi(x) = \phi_0$$

$\Rightarrow$ équation d'évolution pour $U(\phi_0)$

$$\partial_{M^2} U(\phi_0) = \frac{1}{2} \int_p \frac{1}{Z(\phi_0)p^2 + M^2 + U^{(2)}(\phi_0)}$$

$\Rightarrow$ équation d'évolution pour les $g_n(M^2)$ par identification des puissances de $\phi_0$ dans l'équation d'évolution .

C.I. : $U(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2 + g\phi^4$.

## Fluctuations du champ :

$$\phi(x) = \phi_0 + \eta(x)$$

$$\Gamma[\phi] = L^d U(\phi_0) + \frac{1}{2} \int_q \eta(q)\eta(-q) \left( Z(\phi_0)q^2 + U^{(2)}(\phi_0) \right)$$

$\Rightarrow$ équation d'évolution pour $Z(\phi_0)$

$\Rightarrow$ équation d'évolution pour les $\alpha_n(M^2)$ par identification des puissances de $\phi_0$ en facteur de $q^2\eta^2$.

C.I. : $Z(\phi) = \frac{1}{2}$.

Ensemble d'équations différentielles pour $\alpha_n(M^2)$ et $g_n(M^2)$ à intégrer pour obtenir $\alpha_n(0)$ et $g_n(0)$.

## 2. Interaction électrons-électrons

Système concerné : gaz d'électrons
Intérêt : Étude transition Métal-Isolant engendrée par l'interaction de Coulomb en fonction de la densité d'électrons.

Action locale :

$$S_B[\psi^\dagger,\psi,u] = \int_x \psi_x^\dagger \left( i\partial_t + \frac{1}{2m}\Delta_{\mathrm{x}} + \mu + eu_x \right) \psi_x - \frac{1}{2}\int_x (\nabla_{\mathrm{x}} u_x)^2.$$

$\psi$ = champ fermionique (électron),
$u$ = champ bosonique (photon).

Élimination des fluctuations

$$S_B \longrightarrow S_B + S_M$$

avec

$$S_M[\psi^\dagger,\psi,u] = \int_x \left[ \psi_x^\dagger \frac{M^2}{m^2} \left( \frac{1}{2m}\Delta_{\mathrm{x}} + \mu \right) \psi_x - \frac{1}{2} M^2 u_x^2 \right]$$

$M = \infty \Rightarrow$ théorie gaussienne
$M = 0 \Rightarrow$ gaz d'électrons en interaction.

Variation du paramètre $M$ $\Rightarrow$ équation d'évolution pour l'action effective :

$$\partial_{M^2}\Gamma[\bar\psi^\dagger,\bar\psi,\bar u] = -\frac{i}{m^2}Tr[\xi_{\mathbf{p}}\ \underbrace{W^{(2)}_{j,j^\dagger}}_{\text{champ } \psi}\ ] + \frac{i}{2}Tr[\ \underbrace{W^{(2)}_{J,J}}_{\text{champ } u}\ ]$$

avec $\xi_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m} - \mu$.

Écrire les propagateurs $W^{(2)}_{j,j^\dagger}$ et $W^{(2)}_{J,J}$ en fonction de $\Gamma^{(2)}$ à partir de

$$W^{(2)}\Gamma^{(2)} = 1$$

$$\Rightarrow \text{inverser } \Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} \Gamma^{(2)}_{\bar\psi^\dagger_y\bar\psi_x} & \Gamma^{(2)}_{\bar\psi^\dagger_y\bar\psi^\dagger_x} & -\Gamma^{(2)}_{\bar\psi^\dagger_y\bar u_z} \\ \Gamma^{(2)}_{\bar\psi_y\bar\psi_x} & \Gamma^{(2)}_{\bar\psi_y\bar\psi^\dagger_x} & -\Gamma^{(2)}_{\bar\psi_y\bar u_x} \\ \Gamma^{(2)}_{\bar u_y\bar\psi_x} & \Gamma^{(2)}_{\bar u_y\bar\psi^\dagger_x} & \Gamma^{(2)}_{\bar u_y\bar u_x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W^{(2)} &= \left[\Gamma^{(2)}\right]^{-1} = [\Gamma_{\mathrm{d}} + \Gamma_{\mathrm{nd}}]^{-1} \\ &= \Gamma_{\mathrm{d}}^{-1} - \Gamma_{\mathrm{d}}^{-1}\Gamma_{\mathrm{nd}}\Gamma_{\mathrm{d}}^{-1} + \Gamma_{\mathrm{d}}^{-1}\Gamma_{\mathrm{nd}}\Gamma_{\mathrm{d}}^{-1}\Gamma_{\mathrm{nd}}\Gamma_{\mathrm{d}}^{-1} + \cdots \end{aligned}$$

Extraire les éléments de matrice $W^{(2)}_{j,j^\dagger}$ et $W^{(2)}_{J,J}$

$\Rightarrow$ équation d'évolution pour $\Gamma$.

Hypothèse sur la forme de $\Gamma$ (développement du gradient) :

$$\Gamma = \int dx \Big\{ \bar{\psi}_x^\dagger \left[ i Z_0(\bar{u})\partial_t + Z_1(\bar{u})\Delta_{\mathbf{x}}^{\mu} + U_1(\bar{u}) \right] \bar{\psi}_x - \frac{1}{2} Z_2(\bar{u})(\nabla \bar{u}_x)^2 - U_2(\bar{u}) \Big\}$$

où $\Delta_{\mathbf{x}}^{\mu} \equiv \frac{\Delta}{2m} - \mu$.

$Z_i$ $(i = 0{,}1{,}2)$ et $U_i$ $(i = 1{,}2)$ sont des polynômes de $\bar{u}$ dont les coefficients donnent les constantes de couplage.

Approximation du champ homogène :

$$u(x) = u_0$$

Identification des termes fermioniques

$\propto \omega \bar{\psi}^\dagger \bar{\psi} \Rightarrow$ équation d'évolution pour $Z_0$,

$\propto \xi_{\mathbf{p}} \bar{\psi}^\dagger \bar{\psi} \Rightarrow$ équation d'évolution pour $Z_1$,

$\propto \bar{\psi}^\dagger \bar{\psi} \Rightarrow$ équation d'évolution pour $U_1$.

Identification des termes bosoniques

$\Rightarrow$ équation d'évolution pour $U_2$.

Fluctuations dans le champ :

$$u(x) = u_0 + \eta(x)$$

Identification des termes bosoniques

$\propto q^2\eta^2 \Rightarrow$ équation d'évolution pour $Z_2$
$\propto \eta^2 \Rightarrow$ équation d'évolution pour $U_2$

Obtention d'un ensemble d'équations différentielles couplées à intégrer pour obtenir les constantes de couplage pour $M = 0$.

Vérification analytique de la méthode : intégration à l'ordre d'une boucle.

## Approximation à l'ordre d'une boucle

But : retrouver les résultat de la théorie de perturbation, en particulier l'effet d'écran (champ $u$ doit acquérir une masse)

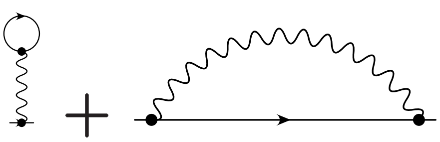
$\partial_{M^2}\Gamma_M = \mathcal{F}_M(\Gamma_M) \Rightarrow$

$$\Gamma_{M=0} = \Gamma_{M=\infty} + \int_{\infty}^{0} d(M'^2)\mathcal{F}_{M'}(\Gamma_{M=\infty})$$

Résultats :

$Z_0 = 1$ =C.I.

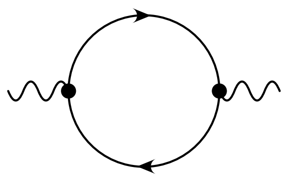
$Z_1 = \frac{m}{m^*} = \infty$ : la masse effective de l'électron est nulle $\Longleftrightarrow$ approximation Hartree-Fock.



$U_1 = eu_0$ =C.I.

$Z_2 = -\frac{me^2}{24\pi^2 k_F}$, $k_F$ = vecteur d'onde de Fermi

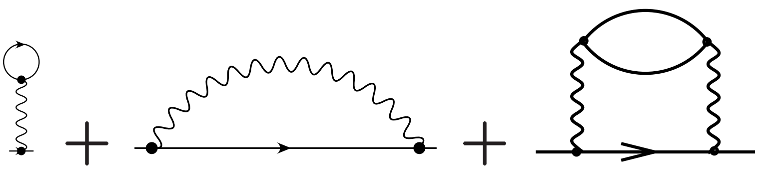
$U_2 = \frac{mk_F e^2}{2\pi^2}$ = masse de Thomas-Fermi.



$\Rightarrow$ L'approximation RPA est retrouvée

Propagateur de l'électron :

$G = G_0 + G_0 \Sigma G$

$\Sigma =$ 

Le calcul à l'ordre d'une boucle permet de décrire l'effet d'écran de l'interaction de Coulomb apparaissant dans les gaz d'électrons et montre ainsi la validité de cette méthode.

## IV. Conclusion et perspectives

### 1. Diffusion multiple

- Étude d'un système désordonné à 2 et 3 dimensions composé de potentiels de type sphères dures ;
- calcul analytique des corrections au libre parcours moyen montre les faiblesses du modèle des diffuseurs ponctuels ;
- Étude numérique de régimes non perturbatifs ;
- mise en évidence d'effets non triviaux lors du passage du régime balistique au régime diffusif.

- Généralisation possible à d'autres types de potentiels (barrière de hauteur finie ou puits) ;
- possibilité de calcul de corrections à la conductivité (développement perturbatif du propagateur à deux particules).
- tenir compte des ondes partielles supérieures ;
- étude du régime de localisation.

## 2. Gaz d'électrons

- Application d'une nouvelle approche non perturbative au problème des électrons en interaction ;
- équations de flots des constantes de couplage ;
- l'approximation RPA est retrouvée à l'ordre d'une boucle.

- Intégration numérique des équations de flot des constantes de couplage (étude transition métal-isolant en fonction des conditions initiales : $\mu$);
- application en dimension 2 ou 1.
- inclure le désordre pour étudier la transition Métal-Isolant du gaz de Coulomb en présence de désordre.

Si $S_M[\psi^\dagger,\psi] = \int_x M^2 \psi_x^\dagger \psi_x$, alors $M^2$ joue le rôle du potentiel chimique.
$M \to \infty \Rightarrow$ densité d'électron diverge
$\Rightarrow$ contribution des boucles d'électron $\propto M^2 \to \infty \Rightarrow$ les fluctuations divergent alors qu'on cherche à les éliminer.

Si $S_M[\psi^\dagger,\psi] = \frac{M^2}{m^2} \int_x \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi_x^\dagger \psi_x$, le calcul à une boucle conduit à une incohérence du type $e = 0$.

Expression d'une séquence de diffusion en dimension 2

$$\langle \mathbf{k}'|\mathbf{t}_i(E)G_0^{(+)}(E)\mathbf{t}_j(E)|\mathbf{k}\rangle$$
$$= 4i\frac{\hbar^2}{2mV}e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{R}_i+i\mathbf{k}\mathbf{R}_j}\sum_{m_1}\sum_{m_2}e^{im_1\theta'-im_2\theta+i(m_1-m_2)(\pi/2-\theta_{ij})}$$
$$\times\frac{J_{m_1}(k'a)}{H_{m_1}^{(1)}(Ka)}\frac{J_{m_2}(ka)}{H_{m_2}^{(1)}(Ka)}H_{m_1-m_2}^{(1)}(KR_{ij})$$

Expression d'une séquence de diffusion en dimension 3

$$< \mathbf{k}'|\mathbf{t}_i(E)G_0^{(+)}(E)\mathbf{t}_j(E)|\mathbf{k} >$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2mV}\frac{(4\pi)^{5/2}}{K}e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{R}_i+i\mathbf{k}\mathbf{R}_j}$$
$$\times\sum_{l_1=0}^{+\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{+l_1}\sqrt{2l_1+1}Y_{l_1}^{m_1*}(\widehat{\mathbf{k}'})$$
$$\times\sum_{l_2=0}^{+\infty}\sum_{m_2=-l_2}^{+l_2}i^{l_2}\sqrt{2l_2+1}Y_{l_2}^{m_2*}(\widehat{\mathbf{R_{ij}}})$$
$$\times\sum_{l_3=0}^{+\infty}\sum_{m_3=-l_3}^{+l_3}\sqrt{2l_3+1}Y_{l_3}^{m_3*}(\widehat{\mathbf{k}})$$
$$\times\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}$$
$$\times\frac{j_{l_1}(k'a)}{h_{l_1}^{(+)}(Ka)}\frac{j_{l_3}(ka)}{h_{l_3}^{(+)}(Ka)}h_{l_2}^{(+)}(KR_{ij})$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{M^2} Z_0 =& \frac{i}{2}\int_p \frac{Z_0^{(2)}}{(Z_2\mathbf{p}^2+U_2^{(2)})^2} \\
&- \frac{1}{2\pi^2}\frac{Z_0^{(1)}}{Z_0^2}\int_0^{k_F} \mathsf{p}^2 d\mathsf{p} \frac{(Z_0^{(1)}Z_1 - Z_0 Z_1^{(1)})\xi_{\mathbf{p}} - (Z_0^{(1)} - Z_0)U_1^{(1)}}{[Z_2(\mathsf{p}^2+{k_F}^2)+U_2^{(2)}]^2 - 4Z_2^2\mathsf{p}^2{k_F}^2} \\
&+ f'(M^2)\frac{\left(Z_0^{(1)}\right)^2}{2mZ_0^2}\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}^2}{Z_2\mathbf{p}^2+U_2^{(2)}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{M^2} Z_1^c =& \frac{i}{2}\int_p \frac{Z_1^{(2)}}{(Z_2\mathbf{p}^2+U_2^{(2)})^2} \\
&- \frac{1}{2\pi^2 Z_0^2}\int_0^{k_F} \mathsf{p}^2 d\mathsf{p} \frac{(Z_0^{(1)}Z_1 - Z_0 Z_1^{(1)})\xi_{\mathbf{p}} - (Z_0^{(1)} - Z_0)U_1^{(1)}}{[Z_2(\mathsf{p}^2+{k_F}^2)+U_2^{(2)}]^2 - 4Z_2^2\mathsf{p}^2{k_F}^2} \\
&\times \left\{ Z_1^{(1)} + 4mZ_2U_1^{(1)}\frac{Z_2(k_F^2-\mathsf{p}^2)+U_2^{(2)}}{[Z_2(\mathsf{p}^2+{k_F}^2)+U_2^{(2)}]^2 - 4Z_2^2\mathsf{p}^2{k_F}^2} \right\} \\
&+ f'(M^2)\frac{Z_0^{(1)}}{Z_0^2}\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{Z_2\mathbf{p}^2+U_2^{(2)}}\left( Z_1^{(1)}\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - U_1^{(1)} \right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{M^2} U_1 =& \frac{f'(M^2)}{2mZ_0^2}\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{Z_0^{(1)}U_1^{(1)}\mathbf{p}^2}{Z_2\mathbf{p}^2+U_2^{(2)}} + \frac{i}{2}\int_p \frac{U_1^{(2)}}{(Z_2\mathbf{p}^2+U_2^{(2)})^2} \\
&- \frac{U_1^{(1)}}{2\pi^2 Z_0^2}\int_0^{k_F} \mathsf{p}^2 d\mathsf{p} \frac{(Z_0^{(1)}Z_1 - Z_0 Z_1^{(1)})\xi_{\mathbf{p}} - (Z_0^{(1)} - Z_0)U_1^{(1)}}{[Z_2(\mathsf{p}^2+{k_F}^2)+U_2^{(2)}]^2 - 4Z_2^2\mathsf{p}^2{k_F}^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{M^2} U_2^{c(2)} =& i\int_p \frac{(Z_2^{(1)}\mathbf{p}^2 + U_2^{(3)})^2}{(Z_2\mathbf{p}^2 + U_2^{(2)})^3} - \frac{i}{2}\int_p \frac{Z_2^{(2)}\mathbf{p}^2 + U_2^{(4)}}{(Z_2\mathbf{p}^2 + U_2^{(2)})^2} \\
& - f'(M^2)\frac{k_F^5}{30\pi^2 m}\frac{Z_0^{(2)}}{Z_0^2} \\
& + if'(M^2)\lim_{q\to 0}\int_p \xi_{\mathbf{p}} \frac{(Z_0^{(1)}\omega_p - Z_1^{(1)}\xi_{\mathbf{p}} + U_1^{(1)})}{(Z_0\omega_p - Z_1\xi_{\mathbf{p}} + U_1)^2} \\
& \qquad \times \frac{(Z_0^{(1)}(\omega_p+\omega_q) - Z_1^{(1)}\xi_{\mathbf{p+q}} + U_1^{(1)})}{(Z_0(\omega_p+\omega_q) - Z_1\xi_{\mathbf{p+q}} + U_1)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{M^2} Z_2 =& -\frac{i}{2}\int_p \frac{Z_2^{(2)}}{(Z_2\mathbf{p}^2 + U_2^{(2)})^2} \\
& + \frac{i}{2}\int_p \frac{1}{(Z_2\mathbf{p}^2 + U_2^{(2)})^3}\Bigg\{ 2(Z_2^{(1)}\mathbf{p}^2 + U_2^{(3)}) \\
& + (Z_2^{(1)})^2 \mathsf{p}^2\cos^2\theta - \frac{(Z_2^{(1)}\mathbf{p}^2 + U_2^{(3)})^2 Z_2}{Z_2\mathbf{p}^2 + U_2^{(2)}} \\
& - 4\frac{(Z_2^{(1)}\mathbf{p}^2 + U_2^{(3)})^2 (Z_2^{(1)}U_2^{(2)} - Z_2 U_2^{(3)}) Z_2 \mathsf{p}^2\cos^2\theta}{(Z_2\mathbf{p}^2 + U_2^{(2)})^2}\Bigg\} \\
& + if'(M^2)\lim_{q\to 0}\frac{d}{d(\mathsf{q}^2)}\int_p \xi_{\mathbf{p}} \frac{(Z_0^{(1)}\omega_p - Z_1^{(1)}\xi_{\mathbf{p}} + U_1^{(1)})}{(Z_0\omega_p - Z_1\xi_{\mathbf{p}} + U_1)^2} \\
& \qquad \times \frac{(Z_0^{(1)}(\omega_p+\omega_q) - Z_1^{(1)}\xi_{\mathbf{p+q}} + U_1^{(1)})}{(Z_0(\omega_p+\omega_q) - Z_1\xi_{\mathbf{p+q}} + U_1)}.
\end{aligned}
$$